

Solución de los ejercicios de autocomprobación

1. Tenemos que,

$$P(X = 1) = P(\text{bola negra}) = \frac{2}{3}$$

$$P(X = 0) = P(\text{bola blanca}) = \frac{1}{3}$$

por tanto, $X \sim \mathcal{Ber}(\frac{2}{3})$, con lo que

$$P(X = x_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{1-x_i}$$

La probabilidad conjunta de una m.a.s de tamaño 5 es:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4, X_5 = x_5) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\sum_{i=1}^5 x_i} \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5 - \sum_{i=1}^5 x_i}$$

Sea ahora $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^5 X_i}{5}$. Sabemos que $T = \sum_{i=1}^5 X_i \sim \mathcal{B}(5, \frac{2}{3})$, donde $\sum_{i=1}^5 X_i = \text{número de bolas negras en 5 extracciones}$. Tenemos que

$$P(\bar{X} = t) = P\left(\frac{\sum X_i}{5} = t\right) = P(\sum X_i = 5t) = P(T = 5t) = \binom{5}{5t} \left(\frac{2}{3}\right)^{5t} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-5t}$$

Sabemos que $\bar{X} = \frac{T}{5}$, con lo que

$$E(\bar{X}) = \frac{E(T)}{5} = \frac{2}{3}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(T)}{25} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n} = \frac{2}{45}$$

2. $X_1 \sim \mathcal{N}(25, 0,4)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(5, 0,2)$. El peso total es el peso del paquete más el del producto, i.e.,

$$X = X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(30, \sqrt{0,4^2 + 0,2^2})$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(30, \frac{\sqrt{0,4^2 + 0,2^2}}{\sqrt{n}})$$

Con $n = 100$ hay que calcular

$$\begin{aligned} P(29 \leq \bar{X} \leq 31) &= P\left(\frac{29 - 30}{\frac{\sqrt{0,4^2 + 0,2^2}}{100}} \leq \frac{\bar{X} - 30}{\frac{\sqrt{0,4^2 + 0,2^2}}{100}} \leq \frac{31 - 30}{\frac{\sqrt{0,4^2 + 0,2^2}}{100}}\right) \\ &= P(-22,37 \leq Z \leq 22,37) \\ &\approx 1 \end{aligned}$$

3. Sabemos que $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{10}{\sqrt{n}})$, por lo tanto

$$\begin{aligned} P(\mu - 5 < \bar{X} < \mu + 5) &= P\left(\frac{\mu - 5 - \mu}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < Z < \frac{\mu + 5 - \mu}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) = \\ &= P(-\sqrt{n}0,5 < Z < \sqrt{n}0,5) \end{aligned}$$

Nos dicen que esa probabilidad debe ser igual a 0,954,

$$0,954 = P(-\sqrt{n}0,5 < Z < \sqrt{n}0,5) = 1 - 2P(Z > \sqrt{n}0,5) \Rightarrow P(Z > \sqrt{n}0,5) = 0,023$$

Como el punto de la $N(0, 1)$ que deja a la derecha una probabilidad de 0,023 es aproximadamente 2 (mirando en las tablas), tenemos que

$$\frac{\sqrt{n}}{2} = 2 \Rightarrow n = 16$$

4. (1) Si n es lo suficientemente grande, utilizaríamos el Teorema Central del Límite y la solución sería la misma del ejercicio 3.
- (2) Si n es pequeño y, puesto que no conocemos cuál es la distribución de la variable, debemos utilizar la desigualdad de Tchebychev.

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Como

$$P(\mu - 5 < \bar{X} < \mu + 5) = P(|\bar{X} - \mu| < 5) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

y esa probabilidad debe ser de, al menos, 0,954,

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0,954 \Rightarrow k = 4,66$$

Sabiendo el valor de k , utilizamos que $\sigma = 10$ en la igualdad

$$k \frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow n = 86,95 \Rightarrow n \geq 87$$

5. Sabemos que $\sigma = 1$ y que la media de los informes consultados oscila entre 6 y 7 con una probabilidad de al menos 0,96, es decir

$$P(6 \leq \mu \leq 7) \geq 0,96$$

Como tenemos muy poca información debemos usar la desigualdad de Tchebychev,

$$P\left(|\bar{X} - \mu| < k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

que es equivalente a

$$P\left(\bar{X} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

y, con nuestros datos

$$P\left(\underbrace{\bar{X} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{=6} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{=7}\right) \geq \underbrace{1 - \frac{1}{k^2}}_{=0,96}$$

Formamos el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{lcl} \text{Long. del intervalo} & 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} & = & 1 \\ & 1 - \frac{1}{k^2} & = & 0,96 \end{array} \right\}$$

cuya solución es $k = 5$ y, lo que nos piden, $n = 100$.